XIX Séries entières

XIX.A Questions de cours :

1. Lemme d'Abel
2. Rayon de convergence de la série somme des séries entières
3. Unicité du développement en série entière

XIX.B Exercices :

Exercice 1: * Rayon de convergence 1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$$

Exercice 2: * Rayon de convergence 2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_n \frac{n!}{4^n \sqrt{(2n)!}} z^n$$

Exercice 3: DSE et suite

En écrivant le développement en série entière de e, en déduire la convergence (et préciser la limite) de la suite de terme général :

$$u_n = n \sin(2\pi n! \mathrm{e}).$$

Exercice 4: ** Résolution d'une EDO par DSE

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $(t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$.

Exercice 5: ** Rayon de convergence 3

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. La suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$;
2. La suite (a_n) est périodique, et non identiquement nulle ;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n ;
4. a_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 6: ** Rayon de convergence 4

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} b_n x^n$.

1. Démontrez que $R' \geq \max(1, R)$.
2. Démontrez que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 7: **** Fonction développable en série entière

Développer en série entière la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{(x-2)^2(2x-1)}$$

et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 8: **** Somme d'une série entière 1

Donner le rayon de convergence et exprimer la somme de la série entière en termes de fonctions usuelles : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ *Indication : dériver $xS(x)$ et effectuer un DES sur le disque ouvert de convergence*

Exercice 9: **** Somme d'une série entière 2

Donner le rayon de convergence et exprimer la somme de la série entière en termes de fonctions usuelles :
$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$

Exercice 10: *** Résolution d'une équation différentielle

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Développer f en série entière au voisinage de 0.